View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung

Mareike MINT, Köln

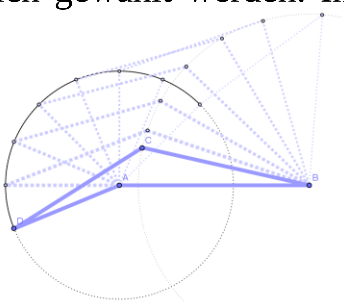
Gelenkvierecke – Elementare Geometrie in alltäglicher Technik erkennen

1. Einleitung

Motiv der folgenden Betrachtungen ist der Gedanke, Lernende dazu anzuregen, ihre Umgebung „geometrischer" wahrzunehmen. Dahinter steht die These, dass das Entdecken geometrischer Phänomene Anreiz zur Beschäftigung mit Geometrie selbst bieten könne. – Wer sich, motiviert durch solche Phänomene, eingehender mit einem (mathematischen) Thema auseinandersetzt, kann zum einen auch tieferes Verstehen dafür entwickeln. Zum anderen findet der für Geometrie Aufmerksamere auch erneut weitere Realisierungen davon in seiner Umwelt.

Im Folgenden sollen als geometrischer Kontext speziell Gelenkvierecke betrachtet werden. Gelenkvierecke sind bewegbare Objekte – sie bieten somit Potential für das Einbeziehen kinematischer Phänomene in den Geometrieunterricht, wie etwa Bender (Bender 1983) es fordert. Auch wird der Lernende zur Interaktion (vgl. Mariotti 2000) mit dem betrachteten Gegenstand oder Sachverhalt angeregt – beobachtend oder selbst handelnd.

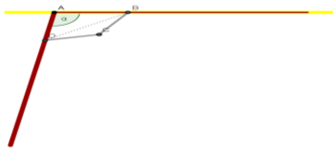
Vier durch Gelenke miteinander verbundene Stangen bilden ein *Gelenkviereck*. Dieses hat einen Freiheitsgrad – beispielsweise ein Winkel oder die Länge einer Diagonale kann also noch zusätzlich gewählt werden. In vielen technischen Realisierungen findet man Gelenkvierecke als *Kurbelgetriebe* wieder – eine der Stangen, bezeichnen wir sie mit AB, wird festgestellt, eine zweite, AD, zu einer Drehung um den Punkt A angetrieben. Während $\angle BAD$ also verschiedene Winkel durchläuft, bewegen sich die beiden anderen Stangen, BC und CD, zwangläufig mit.



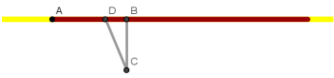
Drei Beispiele für im Alltag anzutreffende Gelenkvierecke werden in Abschnitt 2 betrachtet. Zugleich bieten sie Potential für tiefergehende mathematische Überlegungen; auf drei Aspekte wird in Abschnitt 3 eingegangen.

2. Gelenkvierecke in Anwendungen

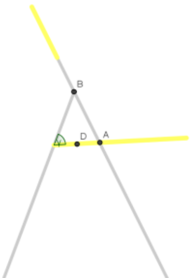
Als erstes Beispiel sei eine Tür mit gelenkiger Metallverstrebung zum Rahmen genannt (siehe Abbildung). Hier liegt ein Kurbelgetriebe vor – während der *Steg* AB (der Türrahmen) stets ruhig bleibt, wird die *Kurbel*



AD (die Tür) angetrieben. Die verbindenden Metallstangen BC und CD werden zwangläufig mitbewegt. Wie lang sollten jene Metallstangen sein, und wo angebracht werden? Mathematisch ausgedrückt: Man bestimme mögliche und zweckmäßige Längen AB, BC, CD, AD!



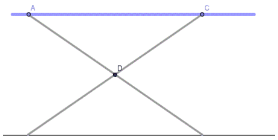
In geschlossenem Zustand sollte die Stange BC möglichst senkrecht zur Tür stehen, damit diese mit maximaler Kraft ins Schloss gedrückt wird; wir finden hier also nach dem Satz des Pythagoras die Bedingung $(AB - AD)^2 + BC^2 = CD^2$. Ist die Tür maximal geöffnet (siehe oben), so sollte dennoch das Gelenk bei C nicht durchgestreckt sein – die Gefahr, dass die Verstrebungen herausgerissen werden, wenn die Tür einmal schwungvoll aufgestoßen wird, wäre sonst groß. Es gilt hier also die Dreiecksungleichung: $BC + CD > BD_{\max}$. Der maximale Abstand der Punkte B und D voneinander lässt sich auch durch den Winkel ausdrücken, den Tür und Rahmen maximal bilden – nach dem Kosinussatz ist $BD_{\max}^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha_{\max}$. Weitere Bedingungen könnten etwa berücksichtigen, dass die Stangen einen bestimmten Abstand zur Türangel nicht unter- bzw. überschreiten sollten.



Ein zweites Beispiel ist ein Klappstuhl – auch hier findet man ein Gelenkviereck; bezeichnen wir es erneut mit $ABCD$ (vgl. Abbildung). Die Untersuchung der Bewegung gestaltet sich aber schon schwieriger: Meist hält man den Stuhl an der Lehne fest und drückt die Sitzfläche von dieser weg – der Antrieb scheint also beim Sitz zu liegen. Allerdings wird eigentlich auch die Lehne in entgegengesetzter Richtung bewegt. Ist es trotzdem sinnvoll, die Ebene, in der sich die Lehne befindet, als unbewegte Bezugsebene und den Stuhl daher erneut als Kurbelgetriebe zu betrachten? Oder geht man von zwei Antrieben aus? Spielt das überhaupt eine Rolle?

In zusammengeklapptem Zustand sollte der Stuhl möglichst „flach" sein – das Gelenkviereck $ABCD$ ist annähernd *durchschlagend*. Für seine Seiten ergibt sich die Beziehung $AB + CD = BC + AD$. Beim aufgestellten Stuhl bilden ABC ein gleichschenkliges Dreieck (siehe oben) – ist das Zufall oder absichtlich so konstruiert? Jedenfalls gilt daher $AB = BC$, und wegen der vorherigen Gleichung auch $CD = AD$. Für den maximalen Öffnungswinkel des Stuhles bei C, $\gamma_{\max}$, ergibt sich daraus $\cos\gamma_{\max} = \frac{CD}{BC}$.

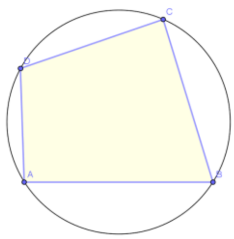
Welche weiteren Bedingungen werden an den aufgeklappten Stuhl gestellt? Natürlich sollte die Sitzfläche ziemlich waagerecht sein, die Rückenlehne leicht nach hinten geneigt. Wie wird das erreicht, wo kann oder muss man Abstriche machen?



Schließlich sei noch ein Bügelbrett als Beispiel für eine *Schubkurbel* genannt – die Stange AD (Bezeichnungen siehe Abbildung) wird erneut als Kurbel betrachtet, der Punkt B jedoch als unendlich weit entfernt in senkrechter Richtung zur Bügelfläche. Der Punkt C, der beim Kurbelgetriebe einen Kreisbogen um B beschreibt, bewegt sich hier daher auf einer Geraden. Welche geometrischen Ideen findet man?

3. Gelenkvierecke – geometrisch betrachtet

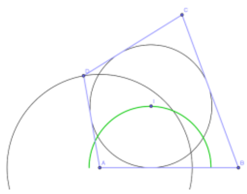
Kann man bei einem gegebenen Gelenkviereck eine Aussage über dessen Flächeninhalt machen? Der folgende Satz nach Wilfried Haags *Wege zu geometrischen Sätzen* (Haag 2003) gibt eine obere Grenze an:



Ein Gelenkviereck habe die Seitenlängen a, b, c, d. Der **Flächeninhalt** des Vierecks ist nach oben beschränkt durch $F_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(ac+bd)^2 - \frac{1}{4}(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$, und der maximale Flächeninhalt wird genau dann erreicht, wenn das Viereck ein nicht überschlagenes **Sehnenviereck** ist.

Hier schließt sich direkt die Frage an, ob solch ein Sehnenviereck immer existiert, d.h. ob der Flächeninhalt bei gegebenen Seitenlängen auch tatsächlich erreicht wird, und ob es gegebenenfalls eindeutig bestimmt ist. Geometrische Sachverhalte, die in Haags Beweis genutzt werden, oder die kontextuell der Aussage nahe liegen, sind beispielsweise: Drehstreckungen – gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck ergänzen sich zu $180°$ – Satz des Ptolemäus – Formel von Brahmagupta für Sehnenvierecke und Satz des Heron für Dreiecke.

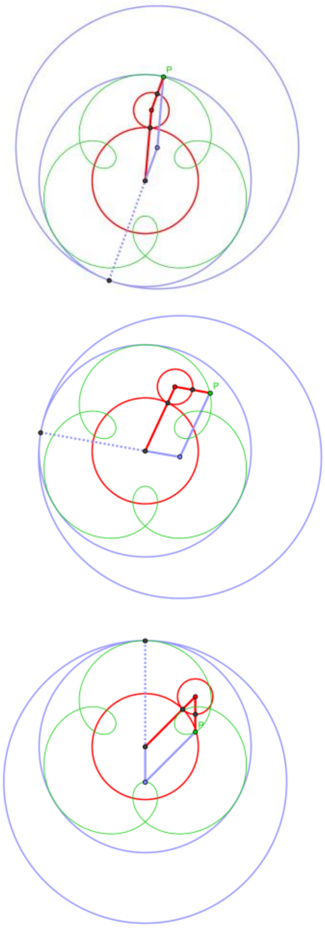
Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, das einen Inkreis hat. Für seine Seitenlängen a, b, c, d gilt $a+c=b+d$, wenn wie üblich a und c sowie b und d einander gegenüberliegen. Ist ein Gelenkviereck ein Tangentenviereck, so bleibt diese Eigenschaft also stets erhalten, wie auch immer es bewegt wird. Hier gilt der folgende Satz:



Sei $ABCD$ ein **Tangenten-Gelenkviereck**, und sei I sein **Inkreismittelpunkt**. Wird die Stange AB festgestellt und der Punkt D auf einem Kreisbogen um A bewegt (Kurbelgetriebe), so bewegt sich auch I auf einem Kreisbogen.

Hier werden verschiedene Eigenschaften von Winkelhalbierenden und Tangentenvierecken benötigt, man trifft auf den Kreis des Apollonius, und dann liegt auch die Inversion am Kreis nahe.

Das letzte Beispiel zeigt einen alltagsnahen Zugang zum Zusammenhang von Gelenkvierecken und Rollkurven auf. Man betrachte einen Kreis k (in der Abbildung rot, kleinerer Kreis), der sich außerhalb eines zweiten Kreises K (ebenfalls rot) befindet und auf diesem rollt. Ein Punkt P, der in der Ebene von k liegt, beschreibt dann eine Rollkurve (grün gezeichnet) in der Ebene von K. Diese Bewegung wird ebenfalls erzeugt durch das Rollen eines Kreises k' (blau, groß) außen auf einem Kreis K' (ebenfalls blau), wobei K' komplett innerhalb von k' liegt (siehe Abbildung) und die beiden unbewegten Kreise K, K' konzentrisch sind. Den Punkt P kann man dabei auch als Ecke C eines Gelenkparallelogrammes $ABCD$ auffassen, bei dem die beiden Stangen AB und AD mit jeweils konstanter (voneinander verschiedener) Geschwindigkeit angetrieben werden. Der Punkt A ist dabei unbewegt und zugleich Mittelpunkt von K und K'. – Zur besseren Vorstellbarkeit dieser Situation kann man eine Uhr heranziehen, bei der Stunden- und Minutenzeiger durch zwei Stäbe zu einem Gelenkparallelogramm ergänzt werden. Das verbindende Gelenk dieser beiden zusätzlichen Stäbe entspricht dem Punkt P, und durch die Vorstellung der Variation von Zeigerlängen und Zahl der Stunden eines Tages (d.h. der Relation der Antriebsgeschwindigkeiten der beiden Zeiger) erhält man verschiedene Rollkurven.



Literatur

Bender, P. & Schreiber, A. (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien, öbv.

Haag, W. (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart, Klett.

Mariotti, M. (2000): Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. In: Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

Müller, R. (1932): Einführung in die Theoretische Kinematik. Berlin: Springer.